2023

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-1

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১নং প্রশ্ন এবং প্রতিটি **ইউনিট** থেকে কমপক্ষে ***একটি*** করে প্রশ্ন নিয়ে আরও ***নয়টি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে সঠিক উত্তরটি যথাযথ যুক্তিসহ নির্বাচন করো ঃ ২×১০

(ক) $6x + 20y - 6z = -3,\ 2x + 6y = -11,\ 6y - 18z = -1$-এই রৈখিক সমীকরণগুলির সিস্টেমের

(অ) একটিমাত্র অভিন্ন সমাধান আছে (আ) কোনো সমাধান নেই

(ই) অসীম সংখ্যক সমাধান আছে (ঈ) কোনোটিই সত্য নয়।

(খ) যদি $3x^2 + 4x - 11$-এই polynomial-টিকে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করা হয়, তবে ভাগশেষ হবে

(অ) -4 (আ) -3

(ই) -2 (ঈ) কোনোটিই নয়।

(গ) $\dfrac{1+2i}{1-(i-1)^2}$-এর modulus হল

(অ) 1 (আ) 2

(ই) ½ (ঈ) 4।

(ঘ) যদি $f(x) = x + [x],\ x \in \mathbb{R}$ হয়, তবে

(অ) $f(x)$, $[0, 2]$ এই interval-এ সন্তত হবে

(আ) $f(x)$, $x = 1$-এ অসন্তত হবে

(ই) $f(x)$, $[0, 2]$ এই interval-এ piecewise continuous হবে

(ঈ) উপরের কোনোটিই সত্য নয়।

(ঙ) $x^2 = 4ay$, (a–প্যারামিটার)-এই family of parabolas-এর envelope হবে

(অ) $x = 0$ (আ) $y = 0$

(ই) $y = 1$ (ঈ) $x = 5$।

(চ) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 4$-এই অবকল সমীকরণটির order = m, degree = n হলে

(অ) $m = 1, n = 1$ (আ) $m = 3, n = 2$

(ই) $m = 2, n = 3$ (ঈ) $m = 2, n = 4$।

(ছ) $5x^2 - 6xy + y^2 = 0$-যে সরলরেখাদ্বয়কে প্রকাশ করে তাদের অন্তর্বর্তী কোণ হবে

(অ) $\frac{\pi}{4}$ (আ) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$

(ই) $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ (ঈ) $\tan^{-1}\frac{2}{3}$।

(জ) (5, 5) বিন্দুতে $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$-এই বক্রের স্পর্শকটি হবে

(অ) $x = 4$ (আ) $y = 4$

(ই) $x = 5$ (ঈ) $y = 5$।

(ঝ) যদি $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \; x^2 + y^2 \neq 0$

$= 0, \qquad x^2 + y^2 = 0$

তবে $f_y(0, 0)$ হবে

(অ) 0 (আ) -1

(ই) 1 (ঈ) অস্তিত্ব নেই।

(ঞ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$-এই ম্যাট্রিক্স-এর rank যদি 1 হয়, তবে x-এর মান হবে

(অ) $3/2$ (আ) 1

(ই) 0 (ঈ) $1/2$।

ইউনিট - ১

(Algebra - I)

২। (ক) $(1+i)^{1/3}$-এর মানসমূহ নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে, $\cos\left\{i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right\} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$।

৩। k-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য $x + y + z = 1,\ 2x + y + 4z = k,\ 4x + y + 10z = k^2$-এই সমীকরণসমূহের সিস্টেমটি সমাধানযোগ্য তা নির্ণয় করো এবং প্রতিটি ক্ষেত্রে সমাধানগুলি নির্ণয় করো। ৫

৪। $x^3 + 12x - 12 = 0$ সমীকরণটি Cardan's method-এ সমাধান করো। ৫

ইউনিট - ২

(Differential Calculus - I)

৫। (ক) $f(x) = \sqrt{8 + 2x - 3x^2}$ -এই অপেক্ষকটির domain of definition নির্ণয় করো। ২+৩

(খ) $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x \neq 0$

$= 0, \qquad x = 0$

এই অপেক্ষকটি $x = 0$-তে continuous কি না পরীক্ষা করো।

৬। যদি $y = \sin\left(m \sin^{-1} x\right)$ হয়, তবে দেখাও যে,

(ক) $\left(1 - x^2\right) y_2 - x y_1 + m^2 y = 0$ ২+৩

(খ) $\left(1 - x^2\right) y_{n+2} - (2n+1) x y_{n+1} + \left(m^2 - n^2\right) y_n = 0$ । ৫

৭। যদি $u = \log\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$ হয়, প্রমাণ করো যে, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{(x+y+z)^2}$ । ৫

৮। $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$ -এই বক্রের asymptote-গুলি নির্ণয় করো। ৫

৯। $x^4 + 4x^3 + 2y^3 + 4x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ -এর singular point-গুলি ও তাদের প্রকৃতিসহ নির্ণয় করো (যদি থাকে)। ৫

ইউনিট - ৩

(Differential Equation - I)

১০। (ক) সমাধান করো ঃ $\left(x^2 - y\right)dx + \left(y^2 - x\right)dy = 0$ । ৩+২

(খ) যেসকল parabola-সমূহের axis y-axis-এর সমান্তরাল তাদের অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো। ৫

১১। সমাধান করো ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$ । ৫

১২। সাধারণ এবং singular-সমাধান নির্ণয় করো ঃ $x^3p^2 + x^2py + a^3 = 0$ ৫

ইউনিট - ৪

(Coordinate Geometry)

১৩। $x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 10y - 19 = 0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে কণিকটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় করো। ৫

১৪। যদি $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সরলরেখাটির সাথে সমবাহু (equilateral) ত্রিভুজ গঠন করে তবে দেখাও যে, $\frac{a}{1-2\cos 2\alpha} = \frac{h}{2\sin 2\alpha} = \frac{b}{1+2\cos 2\alpha}$। ৫

১৫। সেই বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় করো যেটি থেকে $y^2 = 4ax$ এই parabola-র স্পর্শকযুগলের অন্তর্বর্তী কোণ $45°$। ৫

১৬। যদি $l_1^2\left(1-e_2^2\right)+l_2^2\left(1-e_1^2\right) = 2l_1l_2\left(1-e_1e_2\cos\alpha\right)$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{l_1}{r} = 1 - e_1\cos\theta$ এবং $\frac{l_2}{r} = 1 - e_2\cos(\theta-\alpha)$ এই কণিক দুটি পরস্পরকে স্পর্শ করে। ৫

১৭। সেই গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করো যার কেন্দ্রটি $5x + 2z = 0 = 2x - 3y$ সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং যেটি $(0, -2, -4)$ এবং $(2, -1, -1)$ বিন্দুগামী। ৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Answer ***question no.* 1** and ***any nine*** questions from the rest, taking at least ***one*** question from ***each Unit***.

1. Choose the correct option from each of the following questions with proper justification : 2×10

(a) The system of linear equations $6x + 20y - 6z = -3$, $2x + 6y = -11$, $6y - 18z = -1$ has

(i) a unique solution (ii) no solution

(iii) many solutions (iv) none of these.

(b) If the polynomial $(3x^2 + 4x - 11)$ is divided by $(x - 1)$, the remainder will be

(i) -4 (ii) -3

(iii) -2 (iv) none of these.

(c) Modulus of $\frac{1+2i}{1-(i-1)^2}$ will be

(i) 1

(ii) 2

(iii) ½

(iv) 4.

(d) If $f(x) = x + [x]$, $x \in \mathbb{R}$, then

(i) $f(x)$ is continuous in $[0, 2]$

(ii) $f(x)$ is discontinuous only at $x = 1$

(iii) $f(x)$ is piecewise continuous in $[0, 2]$

(iv) None of these.

(e) The envelope of the family of parabolas $x^2 = 4ay$, a being parameter, is

(i) $x = 0$

(ii) $y = 0$

(iii) $y = 1$

(iv) $x = 5$.

(f) If m and n are respectively the order and degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 4$, then

(i) $m = 1, n = 1$

(ii) $m = 3, n = 2$

(iii) $m = 2, n = 3$

(iv) $m = 2, n = 4$.

(g) The angle between the two straight lines represented by $5x^2 - 6xy + y^2 = 0$ is

(i) $\frac{\pi}{4}$

(ii) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$

(iii) $\tan^{-1}\frac{3}{2}$

(iv) $\tan^{-1}\frac{2}{3}$.

(h) The tangent to the curve $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ from $(5, 5)$ will be

(i) $x = 4$

(ii) $y = 4$

(iii) $x = 5$

(iv) $y = 5$.

(i) If $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \neq 0$

$= 0$, $x^2 + y^2 = 0$,

then $f_y(0, 0) =$

(i) 0

(ii) -1

(iii) 1

(iv) does not exist.

(j) If rank of the matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ is 1, then value of x is

(i) $3/2$ (ii) 1

(iii) 0 (iv) $1/2$.

Unit - 1

(Algebra-I)

2. (a) Find the values of $(1+i)^{1/3}$.

(b) Show that $\cos\left\{i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right\}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. 2+3

3. Find the values of k such that the following equations $x + y + z = 1$, $2x + y + 4z = k$, $4x + y + 10z = k^2$ have solution and solve them completely in each case. 5

4. Solve by Cardan's method : $x^3 + 12x - 12 = 0$. 5

Unit - 2

(Differential Calculus - I)

5. (a) Find the domain of definition of the function : $f(x)=\sqrt{8+2x-3x^2}$.

(b) Examine if $f(x)=x^2\sin\left(1/x\right), x\neq 0$

$= 0, \quad x = 0$

is continuous at $x = 0$. 2+3

6. If $y=\sin\left(m\sin^{-1}x\right)$, then show that

(a) $\left(1-x^2\right)y_2-xy_1+m^2y=0$

(b) $\left(1-x^2\right)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}+\left(m^2-n^2\right)y_n=0$. 2+3

7. If $u=\log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$, prove that $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}$. 5

8. Determine the asymptotes of the curve : $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$. 5

9. Find all singular points and its nature, if any, of the curve : $x^4 + 4x^3 + 2y^3 + 4x^2 + 3y^2 - 1 = 0$. 5

Unit - 3

(Differential Equation - I)

10. (a) Solve : $\left(x^2 - y\right)dx + \left(y^2 - x\right)dy = 0$.

(b) Obtain the differential equation of all parabolas having their axis parallel to y-axis. 3+2

11. Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$. 5

12. Find the general and singular solution of $x^3p^2 + x^2py + a^3 = 0$. 5

Unit - 4

(Coordinate Geometry)

13. Reduce the equation $x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 10y - 19 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic. 5

14. If the straight lines $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$ form an equilateral triangle with the straight line $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, then show that $\frac{a}{1 - 2\cos 2\alpha} = \frac{h}{2\sin 2\alpha} = \frac{b}{1 + 2\cos 2\alpha}$. 5

15. Find the locus of the point of intersection of a pair of tangents to the parabola $y^2 = 4ax$ such that the angle between the tangents is $45°$. 5

16. Prove that the two conics $\frac{l_1}{r} = 1 - e_1\cos\theta$ and $\frac{l_2}{r} = 1 - e_2\cos(\theta - \alpha)$ touch one another, if

$$l_1^2\left(1 - e_2^2\right) + l_2^2\left(1 - e_1^2\right) = 2l_1l_2\left(1 - e_1e_2\cos\alpha\right).$$

17. Find the equation of the sphere having centre on the line $5x + 2z = 0 = 2x - 3y$ and passing through the points $(0, -2, -4)$ and $(2, -1, -1)$.